LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 8

Linearna aproksimacija funkcije više varijabla, tangentna ravnina, diferencijal

Lekcije iz Matematike 2.

8. Linearna aproksimacija funkcije više varijabla, tangentna ravnina, diferencijal.

I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se pojmovi linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, uvode i za funkcije dviju ili više varijabla. Takodjer, navode se neke primjene tih pojmova.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
Linearna i kvadratna aproksimacija (aproksimaciji višeg reda, i, konačno, Taylorov red), uz mnoge druge primjene, imaju važnu ulogu u problemu približnog odredjivanja vrijednosti funkcija. Pokazuje se da se ti važni pojmovi mogu definirati i za funkcije više varijabla (samo što ćemo se mi zadržati samo na linearnoj i kvadratnoj aproksimaciji). Naravno, pomoću njih se rješavaju analogni problemi. Jedno od osnovnih jest ovo: kako se približno promijeni vrijednost funkcije f dviju varijabla, ako se varijabla x promijeni od x_0 do $x_0 + \Delta x$, a varijabla y od y_0 do $y_0 + \Delta y$?
S matematičkog stanovišta ova je lekcija važna jer se u njoj uvježbava analogija, jedna od najvažnijih matematičkih, a i znanstvenih metoda.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije funkcije jedne varijable, te pojam parcijalnih derivacija prvog i drugog reda funkcija više varijabla. Takodjer, potrebno je poznavati pojam linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, te pojam diferencijala funkcije jedne varijable.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Linearna aproksimacija funkcije dviju varijabla.
Prema uzoru na linearnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

definiramo linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla f oko (x_0, y_0):

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$ i $y_0 + \Delta y = y$,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Vidimo da formula uzima u obzir doprinos od promjene varijable x i varijable y; ti se doprinosi zbrajaju.

Primjer 1. - primjena formule za linearnu aproksimaciju. Odredimo linearnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) := \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ oko $(1, 2)$ i $(1, 1)$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$
Zato je $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{-1}{\sqrt{6-1^2-2^2}} = -1$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{-2}{\sqrt{6-1^2-2^2}} = -2$
Tu je još: $f(1, 2) = 1$. Zaključujemo (iz druge formule) da za $(x, y) \approx (1, 2)$ vrijedi

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} \approx 1 - (x - 1) - 2(y - 2) = 6 - x - 2y$$

Takodjer je $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{-1}{2}$ i $f(1, 1) = 2$, pa je, za $(x, y) \approx (1, 1)$,

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} \approx 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

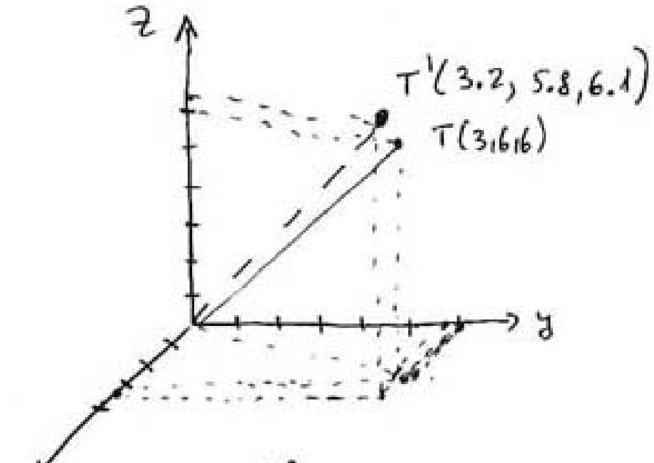
Iz tablice se možete uvjeriti u doseg tih formula.

x	y	$\sqrt{6-x^2-y^2}$	$6-x-2y$	$3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$
1	2	1	1	1.5
1.1	2.1	0.6164	0.7	1.4
1.1	1.9	1.0863	1.1	1.5
0.9	2.1	0.8832	0.9	1.5
1	1	2	3	2
1.1	1.1	1.8321	2.7	1.9
1.1	0.9	1.9950	3.1	2

Primjer 2. Odredimo približno promjenu udaljenosti točke $T(3, 6, 6)$ od ishodišta, ako joj se prva koordinata poveća za 0.2, druga smanji za 0.2 i treća poveća za 0.1?.

Koristimo se formulom za linearnu aproksimaciju funkcije f triju varijabla oko (x_0, y_0, z_0), iz koje dobijemo približnu formulu za prirast funkcije oko (x_0, y_0, z_0):
$\Delta f := f(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta y, x_0 + \Delta z) \approx$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta z.$
Tu je $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 6, 6)$,
$\Delta x = 0.2,\ \Delta y = -0.2,\ \Delta z = 0.1.$
Dalje, vidjeli smo već da je:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Dakle, $f(3,6,6) = 9$, što je početna udaljenost točke T od ishodišta, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,6,6) = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,6,6) = \frac{\partial f}{\partial z}(3,6,6) = \frac{2}{3}$, i konačno: $\Delta f \approx \frac{1}{3} \cdot 0.2 - \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{2}{3} \cdot 0.1 = 0$, pa se udaljenost praktično nije promijenila (sl.1.). Izravnim računom dobijemo da je nova udaljenost $\sqrt{3.2^2 + 5.8^2 + 6.1^2} \approx 9.005$.



Sl.1.

Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije - tangentna ravnina.

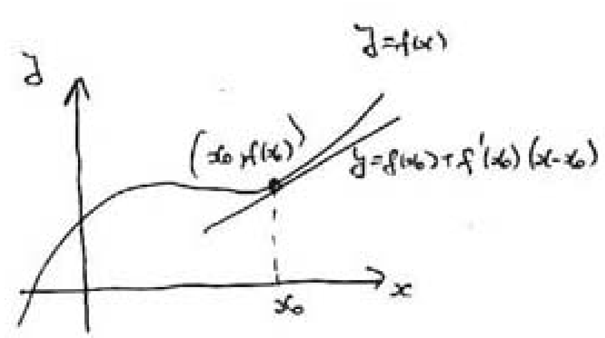
Za funkciju f jedne varijable, formula linearne aproksimacije oko x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

geometrijski se interpretira time što je **pravac** s jednadžbom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) (sl.2). Uočite prijelaz s formule na tangentu: $f(x)$ se zamijeni s y, a približna vrijednost znakom jednakosti.



Sl.2.

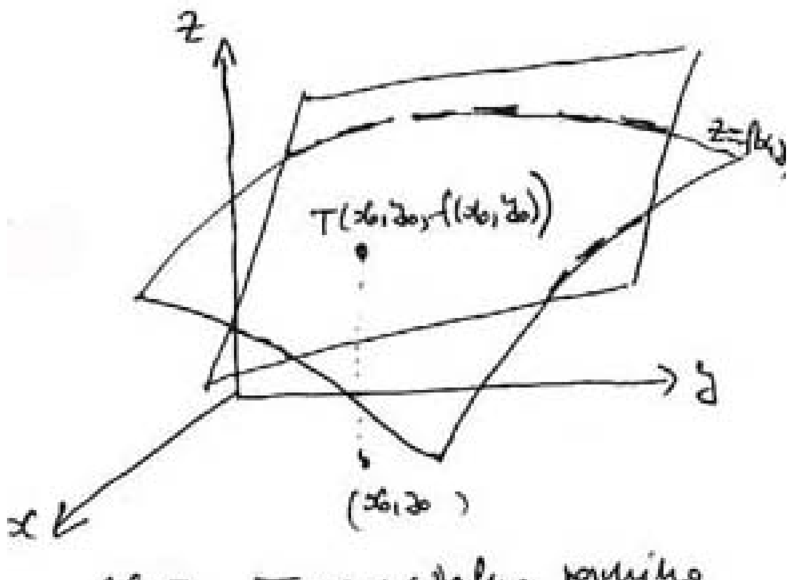
Analogno tome, formula linearne aproksimacije funkcije f oko (x_0, y_0):

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

geometrijski se interpretira time što je **ravnina** s jednadžbom

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

tangentna ravnina na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ (sl.3). Uočite da je u obje formule desna strana ista.



Sl. 3. Tangencijalna ravnina u točki T.

Primjer 3. Odredimo jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije $f(x,y) := \sqrt{6-x^2-y^2}$ u točki $(1,2,1)$.

Koristeći se rezultatom Primjera 1, dobijemo jednadžbu $z = 6 - x - 2y$. To znači da je točka (x,y,z) prostora na tangentnoj ravnini ako i samo ako vrijedi $z = 6 - x - 2y$.

Diferencijal funkcije dviju varijabla.
Prema usporedbi prirasta, približnog prirasta (na osnovi linearne aproksimacije) i diferencijala funkcije jedne varijable:
Prirast funkcije f u x: $\Delta f(x) := f(x+\Delta x) - f(x)$
Približni prirast u x: $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$
Diferencijal u x: $df(x) = f'(x)dx$,
imamo analogne pojmove za funkcije dviju (ili više) varijabla:

Prirast funkcije f u (x,y): $\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$
Približni prirast u (x,y): $\Delta f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$
Diferencijal u (x,y): $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$.
Uočite kako se diferencijal dobije iz formule za približni prirast, zamjenom Δx s dx,Δy s dy, i znaka približne vrijednosti znakom jednakosti.
Analogno vrijedi za funkcije triju ili više varijabla.

Primjer 4. Odredimo diferencijal funkcije $f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i diferencijal te funkcije u $(3,6,6)$.

Koristeći se rješenjem Primjera 2, dobijemo:
$df(x,y,z) := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz =$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$
Uvrštavanjem $x=3,\ y=z=6$ (ali ne u dx, dy, dz), dobijemo:
$d(f(3,6,6)) = \frac{3}{9}dx + \frac{6}{9}dy + \frac{6}{9}dz = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy + \frac{2}{3}dz$

Dodatak: Kvadratna aproksimacija funkcija dviju varijabla.
Prema uzoru na kvadratnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

definiramo kvadratnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla f oko (x_0, y_0):

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y +$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\frac{(\Delta y)^2}{2!}$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$ i $y_0 + \Delta y = y$,

$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2!}$.

Vidimo da formule, iz linearni dio, imaju dodatni, kvadratni dio. Uočite tri pribrojnika u kvadratno dijelu; oni se odnose, redom, na $(\Delta x)^2,\ \Delta x \Delta y,\ (\Delta y)^2$. Uz $\Delta x \Delta y$ nema dijeljenja s 2!, što se može tumačiti time što se jedanput gleda $\Delta x \Delta y$, a drugi $\Delta y \Delta x$.
Postoje analogne formule i za funkcije triju ili više varijabla.
Takodjer, postoje formule za kubnu aproksimaciju itd.

Primjer 5. Odredimo kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) := \ln(x^2+y^2)$ oko (x_0,y_0), posebice oko $(1,0)$.

Vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$,
Odavde dobijemo:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Sad možemo zapisati kvadratnu aproksimaciju (druga formula):
$\ln(x^2+y^2) \approx \ln(x_0^2+y_0^2) + \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}(x-x_0) + \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}(y-y_0) +$
$\frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)^2 + (-4)\frac{x_0 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(y-y_0)^2$

Ako sad stavimo $(x_0, y_0) = (1, 0)$, dobit ćemo
$\ln(x^2+y^2) \approx 0 + 2(x-1) + 0 \cdot (y-0) + (-1)(x-1)^2 - 4 \cdot 0(x-1)(y-0) + 1 \cdot (y-0)^2$,
tj.
$\ln(x^2+y^2) \approx 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2$.